

# CONTRIBUTION A UNE ETUDE STATISTIQUE THEORIQUE DES CHAMPS THERMIQUES TURBULENTS AUX FAIBLES NOMBRES DE PECLET

J.-P. MAYE

Laboratoire\* d'Etudes Aérodynamiques et Thermiques, Section Dynamique des Fluides,  
Université de Poitiers, France

(Reçu le 20 Juin 1974)

**Résumé**—On propose un modèle statistique de calcul des champs thermiques turbulents à propriétés physiques constantes utilisant les équations spectrales des corrélations vitesse-température en plusieurs points; la fermeture du système est réalisée par troncature simple d'ordre  $n$ .

Ce modèle théorique est testé numériquement, avec  $n = 2$ , pour calculer le champ thermique turbulent établi entre deux plans parallèles infinis chauffés à densité de flux thermique constante; les résultats obtenus montrent que la validité du modèle est limitée aux faibles nombres de Péclet.

## NOMENCLATURE

### Grandeurs dimensionnelles

- $x_i$ , coordonnées cartésiennes ( $i = 1, 2, 3$ ) du point  $P$ ;
- $x_i^{(j)}$ , coordonnées cartésiennes du point  $P^{(j)}$ ;
- $U$ , module de la vitesse;
- $U_\tau$ , vitesse de frottement;
- $U_i$ , composante de la vitesse moyenne;
- $u_i$ , fluctuation de vitesse;
- $T$ , température moyenne;
- $t$ , fluctuation de température;
- $T_p$ , température de paroi;
- $T_\tau$ , température de frottement;
- $H$ , demi-distance entre les parois du tunnel;
- $r^{(j)}$ , distance entre les points  $P(x_i)$  et  $P^{(j)}(x_i^{(j)})$ ;
- $\eta^{(j)}$ , nombre d'onde associé à  $r^{(j)}$ ;
- $q$ , densité de flux thermique de paroi;
- $q_m$ , débit masse par unité de largeur du tunnel;
- $C_p$ , chaleur spécifique à pression constante;
- $a$ , diffusivité thermique;
- $\tau$ , temps.

### Grandeurs adimensionnelles

- $y$ , distance du point  $P$  à la paroi ( $y = x_2/H$ );
- $\theta$ , température [ $\theta = (T_p - T)/T_\tau$ ];
- $Pe_\tau$ , nombre de Péclet défini avec  $U_\tau(Pe_\tau = U_\tau H/a)$ .

### Symboles généraux

- $k$ , indice de sommation;
- $w^{(j)}$ , fluctuation  $w$  ( $w = u_i$  ou  $t$ ) considérée au point  $P^{(j)}$ ;
- , corrélation;
- $\langle \rangle$ , spectre.

## 1. INTRODUCTION

L'IDÉE d'appliquer les méthodes statistiques à l'étude de la turbulence n'est pas nouvelle. Chou [1] propose déjà, en 1945, de rechercher les solutions des problèmes turbulents dans le système des équations caractérisant le mouvement moyen et les corrélations. Cette voie se heurte cependant, dans le cas général, à de multiples difficultés concernant notamment la formation d'équations différentielles pour les corrélations, le choix d'une hypothèse de fermeture pour le modèle mathématique obtenu et enfin la résolution pratique de ce dernier.

Pour ces différentes raisons, le domaine d'application le plus fécond pour ces méthodes statistiques, s'est finalement limité, jusqu'à présent, aux études structurales d'écoulements très particuliers (isotropes, homogènes, à gradients constants, etc.). Très peu d'auteurs ont abordé les problèmes plus complexes liés aux écoulements de cisaillement généraux; parmi ceux-ci on citera cependant Kolovandin et Valutin [2] et Cowan [3] qui ont récemment proposé des modèles statistiques pour turbulence non homogène.

La présente étude constitue un prolongement des travaux précédemment mentionnés dans la mesure où elle considère le problème dynamique déjà résolu et donc indépendant du problème thermique, ce qui suppose un transfert de chaleur peu élevé. En fait, la méthode théorique proposée ici s'apparente plus particulièrement à celle de Cowan par le choix identique de l'hypothèse de fermeture et l'utilisation systématique de la transformation de Fourier. Cette méthode, bien qu'apparemment moins élaborée que celle proposée par Kolovandin et Valutin, a le mérite de pouvoir être testée numériquement et relativement facilement sur des écoulements de cisaillement simples, ce qui ne semble pas être vrai pour la précédente et en limite donc l'intérêt dans l'immédiat.

\* Associé au C.N.R.S. No. 191, 40, avenue du Recteur Pineau, 86022 Poitiers, France.

2. CONSTRUCTION DU MODELE THEORIQUE

Pour un écoulement turbulent incompressible, à propriétés physiques constantes et sans dissipation, les équations locales traduisant l'équilibre thermique des mouvements moyen et fluctuant s'écrivent respectivement :

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(U_k T) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( a \frac{\partial T}{\partial x_k} - \overline{u_k t} \right) \tag{1}$$

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + U_k \frac{\partial t}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial T}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k}(u_k t - \overline{u_k t}) = a \frac{\partial^2 t}{\partial x_k^2} \tag{2}$$

Le champ dynamique étant supposé déterminé, par exemple au moyen du modèle théorique proposé par Cowan [2], les équations (1) et (2) contiennent encore, dans le cas général, les 4 inconnues

$$T, \overline{u_1 t}, \overline{u_2 t}, \overline{u_3 t}.$$

La démarche théorique devant conduire à la détermination du champ thermique turbulent, va consister, en premier lieu, à construire un système d'équations différentielles pour les corrélations vitesse-température inconnues.

Selon une technique déjà bien éprouvée (cf. [1], [3], [4], [5], etc.), on forme alors, à partir de (2), une équation générale pour les corrélations spatiales d'ordre (n+1) en (n+1) points; cette équation s'écrit ici :

$$\begin{aligned} & \overline{w^{(1)} w^{(2)} \dots w^{(n)}} \frac{\partial t}{\partial \tau} + \frac{\partial T}{\partial x_k} \overline{u_k w^{(1)} w^{(2)} \dots w^{(n)}} \\ & + U_k \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{w^{(1)} w^{(2)} \dots w^{(n)} t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_k w^{(1)} w^{(2)} \dots w^{(n)} t} \\ & + (*) \overline{w^{(1)} w^{(2)} \dots w^{(n)}} \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_k t}) = a \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \\ & \times \overline{w^{(1)} w^{(2)} \dots w^{(n)} t} \end{aligned} \tag{3}$$

où chaque  $w^{(j)}$  représente l'une quelconque des fluctuations instantanées  $u_1, u_2, u_3$  où  $t$  considérée en un point  $P^{(j)}(x_i^{(j)})$  distinct du point  $P(x_i)$  auquel correspondent (1) et (2).

On applique au premier terme de (3) l'approximation de Taylor [6] sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = U_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \tag{4}$$

Cette hypothèse, initialement introduite pour les écoulements homogènes où elle se trouve alors généralement bien vérifiée (cf. [7], p. 102), n'a toutefois qu'une valeur approximative pour les écoulements de cisaillement plus généraux; Lin [8] a ainsi établi, dans le cas bidimensionnel, que sa validité était liée à la condition

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \gg u_2 \frac{dU_1}{dx_1}.$$

Une meilleure approximation consisterait certainement à remplacer dans (4),  $U_1$  par la célérité  $C$  des fluctuations de température dans la direction  $x_1$ , celle-ci

\*Ce terme étant nul si (3) ne fait intervenir que les corrélations spatiales en 2 points.

traduisant beaucoup mieux la notion de transport des tourbillons par le mouvement moyen. Les comparaisons quantitatives établies par Favre, Dumas et Verollet [9] permettent cependant de penser que l'application de l'hypothèse de Taylor sous la forme (4) au seul premier terme de (3), tout en ne constituant qu'une première approximation, ne représente certainement aussi qu'une faible limitation pour la méthode théorique proposée.

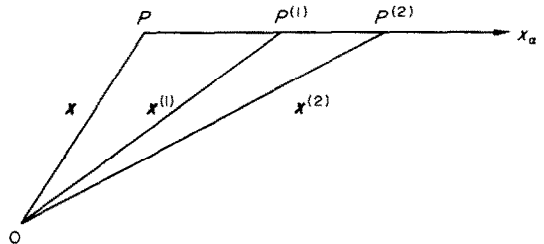
Pour se placer dans les meilleures conditions d'application de cette hypothèse, on supposera cependant, dans ce qui suit, que l'écoulement possède une direction privilégiée bien marquée (voisine de  $x_1$ ), une structure tourbillonnaire assez fine et une intensité de turbulence modérée.

Dans ces conditions, on écrit (3) sous la forme :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \overline{w^{(1)} w^{(2)} \dots w^{(n)} t} - \frac{1}{a} \left( U_k \frac{\partial}{\partial x_k} + U_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \\ & \times \overline{w^{(1)} w^{(2)} \dots w^{(n)} t} = \frac{\partial T}{\partial x_k} \overline{u_k w^{(1)} w^{(2)} \dots w^{(n)}} + \frac{\partial}{\partial x_k} \\ & \times \overline{u_k w^{(1)} w^{(2)} \dots w^{(n)} t} + (*) \overline{w^{(1)} w^{(2)} \dots w^{(n)}} \\ & \times \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_k t}). \end{aligned} \tag{5}$$

Afin de faire apparaître les distances relatives entre les (n+1) points  $P(x_i), P^{(1)}(x_i^{(1)}), P^{(2)}(x_i^{(2)}), \dots, P^{(n)}(x_i^{(n)})$  considérés, on introduit un nouveau système de coordonnées ( $\mathbf{x}, \mathbf{r}^{(1)}, \mathbf{r}^{(2)}, \dots, \mathbf{r}^{(n)}$ ) pour remplacer l'ancien ( $\mathbf{x}, \mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ ) avec la correspondance :

$$\begin{cases} r^{(1)} = x_x^{(1)} - x_x \\ r^{(2)} = x_x^{(2)} - x_x \\ \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \\ r^{(n)} = x_x^{(n)} - x_x \end{cases} \tag{6}$$



On a supposé ici que les (n+1) points  $P, P^{(1)}, \dots, P^{(n)}$  sont alignés sur la même direction  $x_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$  ou  $3$ ), ce qui n'altère pas la validité de la méthode théorique dans la mesure où l'introduction des corrélations spatiales ne constitue qu'un artifice momentané de calcul. Ce choix conditionne cependant la mise en oeuvre pratique de la méthode, ce qui limite cette dernière aux écoulements possédant au moins une direction privilégiée (conduite, jet, couche limite, etc.); ce type de limitation rejoint ainsi ceux déjà mis en évidence dans le § précédent.

D'après (6), la correspondance entre les dérivées partielles du premier ordre exprimées dans les systèmes de coordonnées ancien ( )<sub>1</sub> et nouveau ( )<sub>2</sub> se traduit, pour une corrélation spatiale (en n + 1) points, par :

$$\left\{ \begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \right)_1 &= \left( \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \right)_2 - \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial r^{(j)}} \\ \left( \frac{\partial}{\partial x_\beta} \right)_1 &= \left( \frac{\partial}{\partial x_\beta} \right)_2 \quad (\text{pour } \beta \neq \alpha). \end{aligned} \right. \quad (7)$$

L'équation différentielle (5) s'écrit sans difficulté dans le nouveau système de coordonnées défini par (6), en appliquant (7); cette dernière transformation ne concerne évidemment pas les facteurs

$$\frac{\partial T}{\partial x_k} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_k t})$$

On applique à la nouvelle équation différentielle ainsi obtenue une transformation de Fourier à n dimensions définie par† :

$$\begin{aligned} \langle ww^{(1)} \dots w^{(n)} \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{ww^{(1)} \dots w^{(n)}} \\ &\times \exp. [-i(\eta^{(1)}r^{(1)} + \eta^{(2)}r^{(2)} + \dots + \eta^{(n)}r^{(n)})] \\ &\times dr^{(1)}dr^{(2)} \dots dr^{(n)} \end{aligned} \quad (8)$$

avec la formule d'inversion

$$\begin{aligned} \overline{ww^{(1)} \dots w^{(n)}} &= \left( \frac{1}{2\pi} \right)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \langle ww^{(1)} \dots w^{(n)} \rangle \\ &\times \exp. [i(\eta^{(1)}r^{(1)} + \eta^{(2)}r^{(2)} + \dots + \eta^{(n)}r^{(n)})] \\ &\times d\eta^{(1)}d\eta^{(2)} \dots d\eta^{(n)} \end{aligned} \quad (9)$$

de laquelle on déduit en particulier, pour r<sup>(n)</sup> = 0,

$$\begin{aligned} \overline{ww^{(1)} \dots w^{(n-1)}w} &= \left( \frac{1}{2\pi} \right)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \langle ww^{(1)} \dots w^{(n)} \rangle \\ &\times \exp. [i(\eta^{(1)}r^{(1)} + \eta^{(2)}r^{(2)} + \dots + \eta^{(n-1)}r^{(n-1)})] \\ &\times d\eta^{(1)}d\eta^{(2)} \dots d\eta^{(n)}. \end{aligned} \quad (10)$$

D'après les propriétés de dérivation bien connues de cette transformation, l'équivalence entre opérateurs définis par (7) se traduit dans l'espace de Fourier par :

$$\left\{ \begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \right)_1 &= \left( \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \right)_2 - i \sum_{j=1}^n \eta^{(j)} \\ \left( \frac{\partial}{\partial x_\beta} \right)_1 &= \left( \frac{\partial}{\partial x_\beta} \right)_2 \quad (\text{pour } \beta \neq \alpha) \end{aligned} \right. \quad (11)$$

soit également, en utilisant l'indice de sommation k,

$$\left\{ \begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \right)_1 &= \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \right)_2 - i \sum_{j=1}^n \eta^{(j)} \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \right)_1 &= \left( \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \right)_2 - 2i \sum_{j=1}^n \eta^{(j)} \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \right)_2 - \left( \sum_{j=1}^n \eta^{(j)} \right)^2 \end{aligned} \right. \quad (12)$$

L'équation déduite de (5) par application de la transformation de Fourier s'écrit finalement, en notant

symboliquement  $\theta_n = w^{(1)}w^{(2)} \dots w^{(n)}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \langle \theta_n t \rangle &- \left[ \frac{U_k}{a} \frac{\partial}{\partial x_k} - 2i \sum_{j=1}^n \eta^{(j)} \frac{\partial}{\partial x_k} \right. \\ &\quad \left. - \frac{U_1}{a} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} - (3) i \sum_{j=1}^n \eta^{(j)} \right) \right] \langle \theta_n t \rangle \\ &+ \left[ i \frac{U_2}{a} \sum_{j=1}^n \eta^{(j)} - \left( \sum_{j=1}^n \eta^{(j)} \right)^2 \right] \langle \theta_n t \rangle = G_n \quad (13) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} G_n &= \frac{1}{a} \left[ \frac{\partial T}{\partial x_k} \langle u_k \theta_n \rangle + \left( \frac{\partial}{\partial x_k} - i \sum_{j=1}^n \eta^{(j)} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \langle u_k \theta_n t \rangle + (*) \langle \theta_n \rangle \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_k t}) \right]. \end{aligned}$$

Dans le cas général, (13) est donc une équation aux dérivées partielles du second ordre pour l'inconnue  $\langle \theta_n t \rangle$  définie comme un spectre à n dimensions. Cette équation est couplée avec (1) par l'intermédiaire des facteurs

$$\frac{\partial T}{\partial x_k} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_k t})$$

et avec les équations spectrales à (n-1) dimensions par des intégrations du type (10); de plus, la présence du spectre  $\langle u_k \theta_n t \rangle$  dans le second membre nécessite l'introduction d'une hypothèse de fermeture.

Pour cette dernière, le choix de Cowan [3] pour une troncature simple à l'ordre n (corrélations d'ordre (n + 1) négligées) a finalement été retenu de préférence à l'hypothèse quasi-normale de Millionschikov [10] également utilisée par Kolovandin et Valutin [2]. Ce choix résulte essentiellement de la meilleure intégration pratique de cette hypothèse dans l'équation (13) qui est quasi-linéaire et garde la même forme quel que soit l'ordre de troncature retenu. D'un point de vue physique, il semble que les deux types de fermeture précédents soient également susceptibles de conduire à des incompatibilités, énergie négative par exemple [11], ce qui ne contribue pas, actuellement, à mettre en évidence la supériorité de l'une par rapport à l'autre.

La valeur numérique de l'ordre n de troncature reste cependant à préciser en fonction du type d'écoulement considéré et du degré d'approximation désiré. Dans l'état actuel des connaissances sur les champs de cisaillement fluctuants, ce point reste cependant assez obscur et ne pourra être discuté utilement que sur la base d'investigations expérimentales plus approfondies.

Conditions aux limites

La conclusion précédente s'applique également au choix des conditions aux limites vérifiées par les équations aux dérivées partielles du second ordre (13). Ces conditions doivent en effet être établies dans l'espace de Fourier, ce qui rend actuellement leur évaluation très difficile, même dans les cas d'écoulements à configurations géométriques particulièrement simples (cf. §3.2).

† Les w<sup>(j)</sup> intervenant dans la notation spectrale n'ont évidemment qu'un rôle d'identification sans signification physique propre.

\* Ce terme étant nul pour α ≠ 1, d'après (11).

**3. APPLICATION A UN ECOULEMENT THERMIQUEMENT ETABLI ENTRE DEUX PLANS PARALLELES INFINIS CHAUFFES A DENSITE DE FLUX THERMIQUE CONSTANTE**

**3.1. Equations du modèle pour une troncature du 1er ordre**

On s'est limité, dans cette application numérique, à une approximation du 1er ordre (corrélations triples négligées) par suite du manque total d'informations sur les corrélations spatiales triples de vitesse; pour les corrélations doubles, on a utilisé les résultats expérimentaux de Comte-Bellot [12] qui sont apparus plus complets et crédibles que ceux obtenus théoriquement par Cowan [3] avec une approximation limitée au 1er ordre.

Pour le type d'écoulement étudié ici, les équations (1) et (13) se réduisent, avec l'hypothèse de fermeture adoptée et pour  $\alpha = 2$ , à:

$$U \frac{\partial T}{\partial x_1} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} - \frac{d}{dx_2} (\overline{u_2 t}) \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \langle u_2^{(1)} t \rangle - 2i\eta \frac{\partial}{\partial x_2} \langle u_2^{(1)} t \rangle - \eta^2 \langle u_2^{(1)} t \rangle \\ = \frac{1}{a} \left[ \frac{\partial T}{\partial x_1} \langle u_1 u_2^{(1)} \rangle + \frac{\partial T}{\partial x_2} \langle u_2 u_2^{(1)} \rangle \right]. \end{aligned} \tag{15}$$

Les équations (14) et (15) définies respectivement dans l'espace physique réel et celui de Fourier sont couplés par l'intermédiaire de (16)

$$\overline{u_2 t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle u_2^{(1)} t \rangle d\eta^{(1)}. \tag{16}$$

Le système constitué par les équations (14)-(16) constitue le modèle statistique du premier ordre qui permet de calculer théoriquement les profils de  $\overline{u_2 t}(x_2)$  et  $T(x_2)$  connaissant les champs dynamiques moyen et fluctuant.

Avant de passer à la résolution numérique de ce système, on remarquera que l'écoulement considéré vérifie en tout point (sauf au voisinage du centre du tunnel, pour la seconde relation):

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial x_1} = \frac{2q}{C_p q_m} = Cte \\ \frac{\partial T}{\partial x_1} \langle u_1 u_2^{(1)} \rangle \ll \frac{\partial T}{\partial x_2} \langle u_2 u_2^{(1)} \rangle \end{cases} \tag{17}$$

La première relation de (17) résulte des conditions aux limites thermiques et la seconde de la nature cisailée de l'écoulement considéré. On notera également que le terme convectif dû à l'introduction de l'hypothèse de Taylor, n'apparaît plus dans (15), par suite, d'une part, du choix de l'indice  $\alpha = 2$ , d'autre part, de l'hypothèse d'une densité de flux thermique de paroi constante.

Finalement, une double intégration de (14) avec vérification des conditions limites sur les parois conduit à l'expression (18) de la température réduite  $\theta$

$$\theta(y) = Pe_\tau \left[ y - \int_0^y \int_0^y \frac{U}{U_\tau} (y) dy - \int_0^y \overline{u_2 t}_+(y) dy \right] \tag{18}$$

où la corrélation adimensionnelle  $\overline{u_2 t}_+$  vérifie, compte tenu de (17), le système (19).

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \langle u_2^{(1)} t \rangle_+ - 2i\eta \frac{\partial}{\partial y} \langle u_2^{(1)} t \rangle_+ - \eta^2 \langle u_2^{(1)} t \rangle_+ \\ = -Pe_\tau \frac{\partial \theta}{\partial y} \langle u_2 u_2^{(1)} \rangle_+ \\ \overline{u_2 t}_+ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle u_2^{(1)} t \rangle_+ d\eta. \end{cases} \tag{19}$$

**3.2. Conditions aux limites**

L'équation différentielle (19) étant du second ordre nécessite pour sa résolution deux types de conditions limites, qui, d'après la géométrie de l'écoulement, concernent les valeurs prises par  $\langle u_2^{(1)} t \rangle_+$  sur la paroi ( $y = 0$ ) et au centre du tunnel ( $y = 1$ ).

Malheureusement, il n'existe pas actuellement de résultats théoriques ou expérimentaux permettant de fixer rigoureusement ces conditions. On sait seulement, pour des raisons évidentes (nullité de  $u_2$  à la paroi et symétrie de  $\overline{u_2 t}$  par rapport à  $y$  au centre du tunnel), que:

$$\overline{u_2 t} = 0 \quad \text{pour} \quad \begin{cases} y = 0 \\ y = 1. \end{cases}$$

A défaut d'information plus complètes, on admettra, ainsi que Cowan l'a fait pour  $u_1 u_2^{(1)}$ , que la corrélation spatiale  $\overline{u_2^{(1)} t}$  (et le spectre résultant  $\langle u_2^{(1)} t \rangle$ ) est également identiquement nulle pour  $y = 0$  et  $y = 1$ .

Cette hypothèse se justifie parfaitement pour  $y = 0$ , même si les fluctuations  $t$  ne sont pas exactement nulles à la paroi. Pour  $y = 1$ , la justification physique est moins évidente, bien que la nullité de  $\overline{u_2 t}$  et le niveau peu élevé des intensités de turbulence pour  $u_2$  et  $t$  permette de penser que le maximum de la corrélation spatiale  $\overline{u_2^{(1)} t}$  reste faible au voisinage du centre du tunnel.

**3.2. Solutions explicites**

Avec les conditions aux limites définies précédemment, on montre aisément que la solution générale de l'équation différentielle du second ordre (19) s'écrit:

$$\langle u_2^{(1)} t \rangle = \left[ \int_0^y (y-z)\psi(z, \eta) dz - y \int_0^1 (1-z)\psi(z, \eta) dz \right] \times \exp.(i\eta z) \tag{20}$$

après avoir noté:

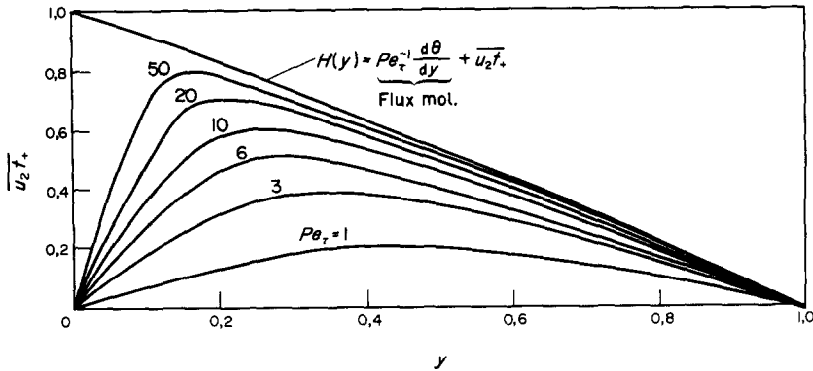
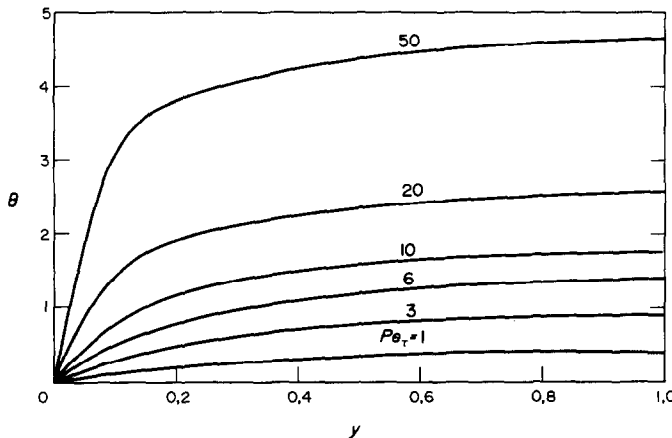
$$\psi(z, \eta) = -Pe_\tau \frac{\partial \theta}{\partial y} \langle u_2 u_2^{(1)} \rangle_+ \exp.(-i\eta z) \tag{21}$$

$z$  étant une variable d'intégration.

**4. RESULTATS NUMERIQUES**

Le modèle statistique ainsi défini par les équations (18) à (21) a été programmé sur IBM 1800 en utilisant, pour les données dynamiques, les résultats expérimentaux de Comte Bellot [12] concernant les vitesses moyennes et les corrélations spatiales doubles  $\overline{u_2 u_2^{(1)}}(y)$  mesurées dans un tunnel bidimensionnel.

Les profils théoriques obtenus pour  $\overline{u_2 t}_+(y)$  et  $\theta(y)$  en fonction du nombre de Péclet sont indiqués sur les Figs. 1 et 2.

FIG. 1. Profils théoriques  $\overline{u_2 t_+}(y)$ .FIG. 2. Profils théoriques  $\theta(y)$ .

La convergence numérique de la méthode itérative utilisée s'est révélée pratiquement impossible au delà de  $Pe_\tau \sim 50$ . Cette limitation résulte essentiellement de l'intervention, dans (20), du gradient de température  $\partial\theta/\partial y$  estimé à partir de (18). L'efficacité de cette technique itérative est en fait subordonnée à la condition que la densité de flux thermique moléculaire ne soit pas négligeable devant son équivalent turbulent; cette condition se traduit physiquement par la nécessité d'avoir un écoulement très faiblement turbulent ou un fluide très conducteur, c'est à dire dans tous les cas un faible nombre de Péclet.

##### 5. CONCLUSION

Le modèle théorique développé dans cet article repose essentiellement sur deux hypothèses simplificatrices: celle de Taylor, permettant de relier l'histoire temporelle du champ thermique à son évolution spatiale et celle de troncature à l'ordre  $n$  permettant de lever la sous-détermination du système des équations aux corrélations spatiales vitesse-température.

Les limitations du modèle statistique proposé sont donc liées à ces deux hypothèses mais aussi et surtout, comme l'a montré la mise en oeuvre numérique, à l'utilisation de (18) comme équation complémentaire, ce qui restreint la validité du modèle aux faibles nombres de Péclet.

En contre partie de ces limitations, la relative simplicité de ce modèle statistique a permis de mettre clairement en évidence la dépendance uniquement implicite entre flux de chaleur turbulent et gradient local de température moyenne. L'application numérique de ce modèle à un problème pratique a également permis de mieux situer les difficultés d'utilisation des méthodes statistiques en turbulence non-homogène et confirmé le rôle fondamental de l'investigation expérimentale pour les progrès futurs de ces dernières.

*Remerciements*—L'auteur remercie le professeur J.-L. Peube du Laboratoire de Dynamique des Fluides de Poitiers pour l'intérêt qu'il a manifesté pour cette étude et les critiques judicieuses qu'il a formulées à son sujet.

##### REFERENCES

1. P. Y. Chou, On velocity correlations and the solutions of the equations of turbulent fluctuations, *Q. Appl. Math.* **3**, 38-54 (1945).
2. B. A. Kolovandin et I. A. Valutin, Statistical transfer theory in non-homogeneous turbulence, *Int. J. Heat Mass Transfer* **15**, 2371-2383 (1972).
3. S. J. Cowan, A general first-order theory for calculating turbulent flow fields, Ph.D., Univ. microfilms, Ann Arbor, Michigan (1968).
4. R. G. Deissler, Turbulent heat transfer and temperature fluctuations in a field with uniform velocity and temperature gradients, *Int. J. Heat Mass Transfer* **6**, 257-270 (1963).
5. J. Fox, Turbulent temperature fluctuations and two-

- dimensional heat transfer in a uniform shear flow, *Int. J. Heat Mass Transfer* **8**, 467–480 (1965).
6. G. I. Taylor, Statistical theory of turbulence, *Proc. R. Soc. A* **151**, 421–478 (1935).
  7. F. H. Champagne, V. G. Harris et S. Corrsin, Experiments on nearly homogeneous turbulent shear flow, *J. Fluid Mech.* **41**, 81–139 (1970).
  8. C. C. Lin, On Taylor's hypothesis and the acceleration terms in the Navier–Stokes equations, *Q. Appl. Math.* **10**, 295–306 (1953).
  9. A. Favre, R. Dumas et E. Verollet, Célérités de fluctuations turbulentes de température et de vitesse dans une couche limite, XIIème Congrès Int. Mech. Appl. Stanford, 192–208 (1968).
  10. M. Millionschikov, On theory of homogeneous isotropic turbulence, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **32**, 615–624 (1941).
  11. J. C. Andre, Irreversible interaction between cumulants of different orders in homogeneous, isotropic, two-dimensional turbulence theory, *Physics Fluids*. To be published.
  12. G. Comte-Bellot, Ecoulement turbulent entre deux parois parallèles, P.S.T. da Ministère de l'Air, 419 (1965).

#### CONTRIBUTION TO A THEORETICAL STATISTICAL STUDY OF TURBULENT THERMAL FIELDS WITH WEAK PÉCLET NUMBERS

**Abstract**—A statistical model for calculating turbulent thermal fields with constant physical properties is proposed; this model uses spectral equations for correlations between velocity and temperature; it is closed at order  $n$  by neglecting correlations of order  $(n+1)$ .

This theoretical model has been tested numerically with  $n = 2$ , for calculating the turbulent established thermal field between parallel infinite walls heated with a constant heat flux; the numerical results show that the validity of the model is limited to weak Péclet numbers.

#### EIN BEITRAG ZUR STATISTISCHEN THEORETISCHEN UNTERSUCHUNG TURBULENTER TEMPERATURFELDER BEI NIEDRIGEN PÉCLET-ZAHLEN

**Zusammenfassung**—Es wird ein statistisches Modell zur Berechnung turbulenter Temperaturfelder mit konstanten physikalischen Eigenschaften vorgeschlagen; dieses Modell benützt Spektral-Gleichungen für die Beziehung zwischen Geschwindigkeit und Temperatur; die Geschlossenheit des Systems wird bei Ordnung  $n$  erreicht, unter Vernachlässigung der Beziehung der Ordnung  $(n+1)$ .

Dieses theoretische Modell wurde numerische getestet mit  $n = 2$ , um das ausgebildete turbulente Temperaturfeld zwischen parallelen unendlichen Flächen mit konstantem Wärmefluß zu berechnen; die numerischen Ergebnisse zeigen, daß die Gültigkeit des Modells auf niedrige Péclet-Zahlen begrenzt ist.

#### К СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПОЛЕЙ ТУРБУЛЕНТНЫХ ПОТОКОВ ТЕПЛА ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ ПЕКЛЕ

**Аннотация** — Предложена статистическая модель для расчета турбулентных потоков тепла с постоянными физическими свойствами. В этой модели для корреляций скорости и температуры используются спектральные уравнения. Они замыкаются путем исключения корреляций порядка  $(n+1)$  в уравнениях для функций  $n$ -го порядка. Эта теоретическая модель проверялась численно при  $n=2$  для расчета поля турбулентных потоков тепла, формирующихся между параллельными бесконечными стенками при  $q_w = \text{const}$ . Численные результаты показывают, что справедливость модели ограничена низкими значениями числа Пекле.